# Vectoranalyse

Hertentamen, 14 augustus 2003, 14:00-17:00

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je naam en je studentnummer.
De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{5}.$$

1. Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x, y, z) = z - x^2 - 2y^2$ en verder is het oppervlak $S$ bepaald door $y = x^2 + z^2$.
   (a) (2) Schets $S$.
   (b) (3) Bepaal met behulp van Lagrange multiplicatoren de extremen van $f$ beperkt tot $S$ (doe dit niet zonder de Lagrange methode).
   (c) (3) Bepaal de aard van de extremen met behulp van een tweede orde test.
   (d) (3) Kies een punt waar $f$ een extreme waarde heeft op $S$ en schets het niveauoppervlak van $f$ door dit punt.
   (e) (4) Vind een parametrisering van $S$ van de vorm
   $$\Phi(s, t) = (s, h(s, t), t)$$
   en definieer $F(s, t) = f(s, h(s, t), t)$. Bepaal de extremen van $F$ en hun aard en vergelijk het resultaat met b) en c).

2. Gegeven het oppervlak $S$ bepaald door
   $$S : \begin{cases} z \geq 0 \\ z = 1 - x^2 - y^2. \end{cases}$$
   (a) (2) Schets $S$.
   (b) (3) Bepaal een parametrisering en de oppervlakte van $S$.
   (c) (3) Bepaal het volume begrensd door $S$ en het $xy$-vlak.
   (d) (3) Definieer het vectorveld $\mathbf{F} = (0, 0, 3z^2y)$. Bereken
   $$\int\int_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

3. Beschouw de afbeelding $T : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$T(u,v) = (u + \sin(\pi v), v).$$

   (a) (2) Schets het beeld $A$ van $T$.
   (b) (2) Is $T : [0,1] \times [0,1] \to A$ bijectief?
   (c) (3) Bereken $\int\int_A y^2 dxdy$.

4. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y - z, x + z, y - x)$$

en de oppervlakken

$$S : z = x^2 + y^2$$

$$V : x + 3y + 5z = 10$$

   (a) (2) Bereken $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$.
   (b) (3) Laat $c = S \cap V$. Kies een orientatie van de kromme $c$ en bepaal

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

   (c) (3) Bepaal een functie $f$ zodanig dat $\mathbf{F} = \nabla f$.
   (d) (4) Laat

$$S : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

   Bepaal $\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ waarbij de normaal op $S$ "naar boven" wijst (derde component positief).